Concours d'admission sur classes préparatoires
Option ECE

RAPPORT DU JURY
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
2022

Présentation de l'épreuve

- L'épreuve comportait, comme d'habitude, trois exercices et un problème, ce qui permettait de juger les candidats sur une partie conséquente du programme des classes préparatoires.
- Le sujet balayait largement le programme en donnant, comme d'habitude, une place importante aux probabilités (deuxième exercice et problème).

La diversité des thèmes abordés a permis à tous les candidats de s'exprimer et de montrer leurs compétences, ne serait-ce que sur une partie du programme.

- Des questions d'informatique étaient proposées dans les exercices 1, 2 et 3.
- Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet bien adapté au public concerné, mais ils constatent avec étonnement que trop de candidats ne savent pas mener une résolution de système linéaire à son terme, ou même confondent une somme finie et une somme de série, et pire, utilisent le théorème d'encadrement pour prouver qu'une série converge, ou encore ignorent ou sabotent le théorème fondamental de l'analyse.

Description du sujet

L'exercice 1, portant sur la partie algèbre linéaire du programme, étudiait l'application φ qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $\varphi(M) = JM - MJ$, où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Il s'agissait de montrer que φ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la question d'informatique, si elle était bien comprise, ce qui n'a pas été souvent le cas, donnait des indications sur les valeurs propres non nulles de φ. Les premières questions de cet exercice ont été souvent bien réussies puisqu'il s'agissait de simples questions de calcul matriciel mais il faut tout de même signaler que ces calculs simples de produits matriciels dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ont été ratés par certains candidats... Les dernières questions, quant à elles, ont donné lieu à de très grosses confusions. La différence entre une famille génératrice et une base n'est pas très nette chez tous les candidats.
Globalement, c'est l'exercice le mieux réussi de l'avis de la majorité des correcteurs.

L'exercice 2, portant sur la partie probabilités du programme, s'intéressait à un jeu vidéo au cours duquel le joueur doit essayer, pour gagner, de réussir, dans l'ordre, n niveaux numérotés 1, 2, …, n, ce joueur ne pouvant accéder à un niveau que s'il a réussi le niveau précédent. Le jeu s'arrête lorsque le joueur échoue à un niveau ou bien lorsqu'il a réussi les n niveaux du jeu.
Pour tout entier k de $[\![1;n-1]\!]$, le joueur a le niveau k si, et seulement si, il a réussi le niveau k et échoué au niveau $k+1$. Le joueur a le niveau n si, et seulement si, il a réussi le niveau n et le joueur a le niveau 0 s'il a échoué au niveau 1.
On admet que la probabilité de passer d'un niveau à un autre est constante et égale à $p \in \,]0,1[$, la probabilité d'accéder au niveau 1 étant, elle aussi, égale à p et on note X_n le niveau du joueur.

Cet exercice a permis de départager de façon tranchée les candidats. Il est le moins bien réussi de cette épreuve (avec l'exercice 3 et la fin du problème) : il semble que beaucoup de candidats aient eu parfois la sensation de répondre correctement aux questions, ce qui n'était pas le cas...

L'exercice 3, portant sur la partie analyse du programme, proposait l'étude de la fonction f_n ($n \in \mathbb{N}^*$) définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{x}{x+n}$$

Dans un deuxième temps, on cherchait la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 f_n(x)dx$, cette somme étant la constante d'Euler-Mascheroni γ dont on cherchait une approximation grâce aux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Un script `Scilab` permettait de déterminer le plus petit entier naturel *n* pour lequel S_n est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près.

Cet exercice a, dans l'ensemble, été très moyennement réussi, tant les confusions entre suites et séries sont légion.

Le problème, portant sur les parties analyse et probabilités du programme, proposait dans une première partie l'étude des intégrales $I(p,q) = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$, où *p* et *q* sont deux entiers naturels.

La deuxième partie proposait l'étude d'une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où X_n admet comme densité la fonction b_n définie par $b_n(x) = \begin{cases} \alpha_n x^n(1-x)^n & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1] \end{cases}$, avec $\alpha_n = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}$.

Pour finir, la troisième partie proposait d'étudier la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \alpha_n \int_0^x t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t$$

Chez un certain nombre de candidats, les calculs d'intégrales (pourtant pas très compliqués ici) ont posé de sérieuses difficultés (problème de signe fréquent pour la dérivée de $x \to (1-x)^q$.

La définition d'une densité (partie 2) semble connue de la grande majorité des candidats, contrairement à celle d'un point d'inflexion (partie 3).

Statistiques

• Pour l'ensemble des 3351 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est égale à 10,27 sur 20 (très légèrement supérieure de 0,1 point à celle de l'année dernière), la médiane est égale à 9,9 et l'écart type vaut 5,67 (identique à celui de l'année dernière, et toujours très important, ce qui est signe d'un classement efficace des candidats).

• 39,3% des candidats, contre 40,4% l'année dernière, ont une note inférieure à 8 (dont 16,6% ont une note inférieure à 4 contre 16,9% l'année dernière).

• 22,3% des candidats ont une note comprise entre 8 et 12 (pourcentage très légèrement supérieur à celui de l'année dernière qui était égal à 21,7%).

• 20,3% des candidats ont une note supérieure ou égale à 16 (pourcentage un peu supérieur à celui de l'année dernière qui était égal à 19,1%).

Conclusion

Comme l'année dernière, le niveau est très hétérogène et l'impression générale ressentie à la lecture des copies amène à penser que les notions courantes, les calculs classiques (hors résolution de systèmes linéaires) et les raisonnements simples sont maîtrisés par un grand nombre de candidats, mais dès que l'énoncé propose une réflexion plus fine ou présente une notion un peu théorique, il ne reste que peu de candidats pouvant se hisser à ce niveau : ceux qui ont pu le faire ont clairement fait la différence sur le gros de la troupe.

Sur la forme, les copies sont, dans l'ensemble, agréablement présentées et rédigées dans un souci de clarté et de transparence mais les correcteurs remarquent qu'il y a encore quelques candidats qui rendent des copies difficiles à lire, sur lesquelles certains « n'écrivent pas droit et pas sur les lignes » avec en plus, beaucoup de fautes d'orthographe et de grammaire. Certains correcteurs proposent de revenir à un bonus pour les copies agréables à lire ou à un malus pour les copies sales et peu respectueuses du correcteur.

Sur le fond, les copies sont majoritairement honnêtes mais il reste un assez grosse minorité de candidats adeptes du bluff (notamment en probabilité) : ils doivent savoir que l'absence d'argument ou le manque de précision rend la réponse irrecevable ! Une bonne réponse est une réponse construite rigoureusement.

Conseil aux futurs candidats : il faut prendre le temps de lire correctement chaque question et d'en comprendre les enjeux avant de se lancer dans une résolution aventureuse menant à une réponse incomplète, voire complètement hors-sujet.
Dans la pratique, il ne faut pas rester plus de 4 ou 5 minutes sur une question, sauf pour terminer un long calcul.